多くのCousin分布が解をもつ領域について (Cousin問題について)

AUTHOR(S):

梶原, 壤二

数理解析研究所講究録
141巻 1972年 87-94

多くのCousin分布が解をもつ領域について

九大 理　梶原壤二

§1. 序

複素多様体X上の加法的(または乗法的)Cousin分布が解をもつときXはCousin−I(またはCousin−II)であると略称しよう。Oka[ ]は$\mathbb{C}^n$の正則領域はCousin−Iであることを示した。またOka[ ]は$\mathbb{C}^n$の正則領域ではCousin−II分布が解をもつための必要十分条件はそれが位相的に解をもつことであることを示した。Lを複素Lie群，$\mathfrak{O}_L$をLに値をもつ正則(または連続)関数の芽全体の作る群の層とする。Grauert[ ]は標準写像

$$H^1(X,\mathfrak{O}_L)\longrightarrow H^1(X,\mathfrak{C}_L)$$

がStein空間Xに対して双射であることを示して，岡の原理を一般化した。これを用いれば，端的にいって，Stein空間にてCousin分布が解をもつための条件は全く位相的である。

逆に多くのCousin分布が解をもつ$\mathbb{C}^n$の領域は正則領域であ

ろうか？ Cartan [ ]−Behnke−Stein [ ]によれば，$\mathbb{C}^2$のCousin-I領域は正則領域である。しかしCartan [ ]によれば，$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 ; |z_1|<1, |z_2|<1, |z_3|<1\} - \{(0,0,0)\}$ は正則領域ではないがCousin−I領域である。またThullen [ ]によれば，$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; |z_1|<1, |z_2|<\} - \{(0,0)\}$は正則領域でないがCousin−IIである。一見2次元のときのCousin−I分布に対する以外は，多くのCousin分布が解をもてば正則領域であるという主張は貫けないようにみえる。しかし本講演で述べるようにCartan−Behnke−Steinの定理を様々の場合に拡張して我々の主張を貫けるのである。本講演の主要な目的はAdachi−Suzuki−Yoshida [ ], Kajiwara [ ], [ ], [ ], [ ], Kajiwara−Kazama [ ], Mōri [ ]というこの研究集会に出席している人々の仕事を全く証明なしに上の観点から紹介することにある。

§2. Cousin−I問題による正則領域の特徴付け

単連結な複素平面の領域の直積集合を単連結な柱状領域という。$\mathbb{C}^n$の開集合Ωは$\mathbb{C}^n$の任意の単連結な柱状領域Pに対して$\Omega \cap P$がCousin-Iのとき I−正規という。Kajiwara [ ]によれば，Ωが$\mathbb{C}^n$の余次1次元の滑らかな境界をもつ領域であるとき，ΩがI−正規であるための必要十分条件はΩが正則領域であることである。これはCousin−I問題による正則領域の特徴

付りである。例えば上述のCartanの領域$\Omega=\{(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{C}^3;\ |z_1|<1,\ |z_2|<1,\ |z_3|<1\}$はI−正規であるが正則領域でない。これは境界が余実1次元でないからである。また超球環$\Omega=\{(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{C}^3;\ 1<|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2<4\}$は余実1次元の滑らかな境界をもつCousin−I領域であるが，正則領域ではない。これはΩがI−正規でないからである。これからも，二つのCousin−I領域の交わりは必ずしもCousin−Iでないことがわかる。Ωが余実1次元の滑らかな境界をもつ$\mathbb{C}^n$の境界である限り，単連結な柱状領域というある種のCousin−I領域との交わりが中はりCousin−Iであれば，必然的にΩが正則領域であるわけである。

§3. Cousin−II問題と正則領域との関係

Thullen[ ]は$D=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2;\ |z_1|<1,\ |z_2|<2\}-\{(0,0)\}$がCousin−IIであることを示した。$\mathbb{C}^2$では正則領域ではないCousin−II領域があるので，Cartan−Behnke−Steinの定理はそのままではCousin−II問題に対しては拡張できない。

$\mathcal{O}^*$を値零をとらぬ正則関数の芽全体の作る層とする。Kajiwara[ ]によれば，$\mathbb{C}^2$の領域Ωが$H^1(\Omega,\mathcal{O}^*)=0$をみたすための必要十分条件はΩが$H^2(\Omega,\mathbb{Z})=0$をみたす正則領域であることである。Thullenの領域Dは$H^1(D,\mathcal{O}^*)\neq 0$なるCousin−II領域の例である。ここままると，Cousin−Iの代りに$H^1(\cdot,\mathcal{O}^*)=0$

でおきかえるとCousin-I問題に関する命題はそのまま成立しそうである。$\mathbb{C}^n$の開集合Ωは$\mathbb{C}^n$の任意の単連結な柱状領域Pに対して$H^1(\Omega\cap P,\mathcal{O}^*)=0$をみたすとき，*－正規という。Kajiwara [ ]は余実1次元の滑らかな境界をもつ$\mathbb{C}^n$の領域Ωが*－正規であれば，Ωは正則領域であることを示した。

所が Thullen[ ]は$\mathbb{C}^2$のCousin-II領域Ωの閉包はその正則包を含むことを示した。これを用いれば，余実1次の境界をもつ$\mathbb{C}^2$のCousin-II領域は正則領域である。$\mathbb{C}^n$の領域Ωは，$\mathbb{C}^n$の任意の単連結な柱状領域Pに対して$\Omega\cap P$がCousin-II領域のとき，II－正規であるという。Adachi-Suzuki-Yoshida [ ]によれば，$\mathbb{C}^n$の余実1次元の境界をもつ領域ΩがII－正規であれば，Ωは正則領域である。上述のように$H^1(\cdot,\mathcal{O}^*)=0$という条件はCousin-IIという条件より真に強いから，*－正規という条件はII－正規という条件より強い。したがってAdachi-Suzuki-Yoshidaの結果は梶原のそれよりもよい。この問題については講究録のこの巻の吉田守[ ]を参照されたい。

§4. 一般の複素Lie群に値をもつCousin問題と正則領域との関係

複素Lie群Lに値をもつ正則写像の芽全体の層を$\mathcal{O}_L$とする。Kajiwara[ ]によれば，$\mathbb{C}^2$の領域Ωがある可換な複素Lie群に対し

て $H^1(\Omega, \mathcal{O}_L)=0$ をみたせば，Ωは正則領域である。ある複素Lie群に対して，$\mathbb{C}^n$の領域Ωが$\mathbb{C}^n$の任意の単連結な柱状領域Pに対して$H^1(\Omega\cap P, \mathcal{O}_L)=0$ をみたせば，Ωは<u>L−正規</u>であるという。同じくKajiwara[ ]によれば，$\mathbb{C}^n$の実余1次元の滑らかな境界をもつ領域Ωがある可換複素Lie群Lに対してL−正規であれば，Ωは正則領域である。これについては講究録の梶原壌二[ ]を参照されたい。

最近のKajiwara−Kazama[ ]によれば，2次元のStein多様体の領域Ωが，必らずしも可換でない，複素Lie群Lに対して$H^1(\Omega, \mathcal{O}_L)=0$ をみたせば，ΩはStein多様体である。これについては講究録のこの巻の梶原壌二[ ]を参照されたい。また最近Mori[ ]は上の事柄を一般化している。それによれば，$H^2(\Omega, \mathcal{O})=\cdots=H^{n-1}(\Omega, \mathcal{O})=0$ をみたすn次元のStein多様体の領域Ωがある複素Lie群Lに対して$H^1(\Omega, \mathcal{O}_L)=0$ をみたせば，ΩはStein多様体である。これについては講究録のこの巻の毛織泰子[ ]を参照されたい。以上を通じて一貫していえることを標語的に述べれば

多くのCousin問題が解をもつ領域はSteinである。

引用文献

[1] K. Adachi, M. Suzuki and M. Yoshida, Cousin-II domains and domains of holomorphy, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, 24(1970), 242-248.

[2] H. Behnke, und K. Stein, Analytische Funktionen mehrer Veränderlichen zur vorgegebenen Null-und Pollstellen-flächen. Jber. Deut. Math. Verein. 47(1937), 177-192.

[3] H. Cartan, Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes. C. R. Paris 199(1934), 1284-1287.

[4] ————, Sur les premières problemes de Cousin. C. R. Paris 207(1938), 558-560.

[5] H. Grauert, Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen, Math. Ann. 68(1958), 263-273.

[6] J. Kajiwara, Some characterizations of Stein manifold through the notion of locally regular boundary points. Kōdai Math. Sem. Rep. 16(1964), 36-46.

[7] ————, Note on a Cousin-II domain over C^2. Ibid. 17(1965), 44-47.

[8] ————, Relations between domains of holomorphy and multiple Cousin's problems. Ibid., 261-272.

[9] J. Kajiwara, Some extension of Cartan-Behnke-Stein's theorem, Pub. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. 2(1966), 133-156.

[10] 梶原壌二, Cousinの問題とその応用, 数学(論説) 15(1963), 82-96.

[11] ————, Cartan-Behnke-Steinの定理の拡張, 数理解析研究所講究録 13, 1966年, 1-20.

[12] ————, コホモロジー類が消滅する2次元の複素多様体について, 数理解析研究所講究録, Cousinの問題 1972年.

[13] J. Kajiwara and H. Kazama, Two dimensional complex manifolds with vanishing cohomology sets (to appear).

[14] Y. Mōri, A complex manifold with vanishing cohomology sets, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. (1972) (to appear).

[15] 毛織泰子, Serreの定理の一般化について, 数理解析研究所講究録, Cousinの問題 1972年.

[16] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables : II Domaines d'holomorphie. J. Sci. Hiroshima Univ. 7(1937), 115-130.

[17] K. Oka, Sur les fonctions analytique de plusieurs variables : III Deuxième problème de Cousin, J. Sci. Hiroshima Univ., 19(1938), 7-19.

[18] P. Thullen, Sur les deusième problème de Cousin. C. R. Paris 200(1935), 720-721.

[19] , Bemerkungen über analytische Flächen im Räume von n komplexen Veränderlichen im Zussammenhang mit dem zweiten Cousinschen Problem, Math. Ann. 183(1969), 1-5.

[20] 吉田守, Cousin-II 問題と正則領域との関係について, 数理解析研究所講究録, Cousinの問題 1972年